$$\Big(P(1) \land \forall n \in \mathbb{N}\big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} P(n)$$

$$\forall P \subseteq \mathbb{N},\ \Big[(1 \in P) \land \big(\forall n \in \mathbb{N},\ n \in P \Rightarrow n+1 \in P\big)\Big] \Rightarrow P = \mathbb{N}$$

$$P(1), \qquad P(n) \Rightarrow P(n+1) \qquad \vdash \qquad \forall n \in \mathbb{N} P(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \cdots$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\Big(P(0) \land \forall n\,(P(n) \to P(n+1))\Big) \to \forall n\, P(n)$$

Ronaldo Alves

A Demonstração em Matemática e o Princípio de Indução Finita

Teoria, Exemplos e Aplicações

ALTA CULTURA

Ronaldo Alves

A Demonstração em Matemática e o Princípio de Indução Finita

Teoria, Exemplos e Aplicações

Alta Cultura

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

A474b Alves, Ronaldo.
A Demonstração em Matemática e o Princípio de Indução Finita: Teoria, Exemplos e Aplicações / Ronaldo Alves. – 1. ed. – Fortaleza: Publicação Independente, 2026.

215 p. : il. ; 23 cm.

1. Matemática. 2. Lógica Matemática. 3. Demonstrações Matemáticas. 4. História da Matemática. I. Título.

Publicação Independente
Primeira edição, 2026
ISBN: 979-8-19190253-1

© *2026 Ronaldo Alves*. Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, distribuída ou transmitida por qualquer meio sem a autorização prévia por escrito do autor.

Escrita e Pesquisa: Ronaldo Alves
Revisão Científica: Ronaldo Alves
Diagramação e Capa: Ronaldo Alves

Sumário

Prefácio **xiii**

1 Introdução **1**

2 Demonstração: Definição **7**
2.1 Lógica e Demonstração 10
2.2 Demonstração Formal 13
2.3 Demonstrações: Conceitos e Aplicações . . 15
2.4 A Fenomenologia do Erro 16
2.5 PCN, BNCC e a Demonstração 19

3 Implicações no Ensino **22**
3.1 Importância da Demonstração no Ensino de Matemática 24
3.2 O Ensino do Teorema de Pitágoras Pela Via da Demonstração 26
3.3 A Objetividade do Ente Matemático e a Crítica ao Subjetivismo 30
3.4 O Rigor como Antídoto à Abolição do Pensamento Crítico 31
3.5 A Integridade Científica e o Entendimento da Causa 32

4 Indução Matemática **33**
4.1 Axiomas de Peano 34
4.2 Princípio da Boa Ordenação (PBO) 34
4.3 Primeira Forma do Princípio de Indução Finita 36
4.4 Segunda Forma do Princípio de Indução Finita 44
4.5 Diferença Entre os Princípios de Indução . 49
4.6 Esquema Lógico de Aplicação do Método Indutivo 49
4.7 Mais Alguns Exemplos de Demonstração por Indução 50

5 Indução Matemática em Conteúdos do Ensino Médio **54**
5.1 Sequências e Progressões Elementares . . . 56
5.1.1 Termo Geral de uma Progressão Aritmética 56
5.1.2 Soma dos *n* Termos de uma Progressão Aritmética 57
5.1.3 Termo Geral de uma Progressão Geométrica 59
5.1.4 Soma dos Termos Iniciais de uma Progressão Geométrica 61
5.1.5 Soma das Potências de Base Dois . 62
5.1.6 Soma dos *n* Primeiros Números Ímpares 63
5.1.7 Soma dos *n* Primeiros Números Pares 65
5.1.8 Soma da Sequência Aritmético-geométrica Elementar 66
5.2 Matemática Financeira 68
5.2.1 Fórmula do Montante em Juros Compostos 68
5.2.2 Análise do Crescimento Exponencial 69
5.3 Geometria Plana e Espacial 71
5.3.1 Soma das Medidas dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo . . 72

5.3.2 Soma das Medidas dos Ângulos Externos 75
5.3.3 Número de Diagonais de um Polígono Convexo 77
5.3.4 Teorema de Euler 87

6 Indução Matemática em Combinatória e Álgebra Linear 96
6.1 Combinatória e o Triângulo de Pascal . . . 98
6.1.1 Número de Subconjuntos de um Conjunto Finito 98
6.1.2 Permutações Simples de n Elementos 100
6.1.3 Relação de Stifel 101
6.1.4 Teorema do Binômio de Newton . . 103
6.1.5 Soma dos Coeficientes Binomiais . 105
6.1.6 Soma Alternada dos Coeficientes Binomiais 107
6.1.7 Soma dos Coeficientes Binomiais de Ordem Par 108
6.1.8 O Problema da Torre de Hanói . . . 110
6.2 Teoria dos Números e Divisibilidade 112
6.2.1 Propriedade de Divisibilidade por Indução 112
6.2.2 Propriedade dos Múltiplos de Três . 113
6.2.3 Propriedade de Divisibilidade por Cinco 114
6.2.4 Divisibilidade por Nove na Base Decimal 115
6.2.5 Divisibilidade da Soma de Potências Ímpares 116
6.3 Recorrência de Fibonacci e Álgebra Linear 117
6.3.1 Sequência de Fibonacci e Matrizes . 117
6.3.2 Identidade de Cassini para Fibonacci 120
6.3.3 Fórmula de Binet para a Sequência de Fibonacci 122

7 Indução Matemática: Somatórios e Desigualdades 124
7.1 Somatórios Polinomiais e Séries Analíticas 126
7.1.1 Soma dos Quadrados dos n Primeiros Números Naturais 126
7.1.2 Soma dos Cubos dos n Primeiros Naturais 127
7.1.3 Soma das Quartas Potências dos n Primeiros Naturais 129
7.1.4 Soma de Produtos de Dois Termos Consecutivos 131
7.1.5 Soma de Inversos de Produtos Consecutivos 132
7.1.6 Soma de Produtos Envolvendo Fatoriais 133
7.2 Desigualdades e Análise Real 135
7.2.1 Desigualdade de Bernoulli 135
7.2.2 Desigualdade Envolvendo o Fatorial 137
7.2.3 Desigualdade Triangular Generalizada 139
7.2.4 Desigualdade das Médias para Potências de Dois 140

8 Aplicações Avançadas: Do Cálculo à Física Quântica 144
8.1 Cálculo Diferencial e Variáveis Complexas 146
8.1.1 Primeira Fórmula de De Moivre . . 146
8.1.2 Derivada da Função Potência via Indução 148
8.1.3 Regra de Leibniz para a Derivada n-ésima 149
8.1.4 Derivada de Ordem n da Função Seno 151
8.1.5 Derivada de Ordem n da Função Cosseno 152
8.1.6 Estrutura da Derivada de Ordem n da Função Tangente 153

8.1.7 Derivada de Ordem n da Função Exponencial 154
8.1.8 Polinômio de Taylor e Aproximações de Ordem n 155
8.1.9 Integração por Partes Iterada e a Função Gama 158
8.1.10 Fórmula de Cauchy para Integração Repetida 160
8.1.11 Forma Integral do Resto no Polinômio de Taylor 162
8.1.12 Estrutura de Faà di Bruno para a Regra da Cadeia Generalizada . . . 164
8.2 Física-Matemática e Modelagem 166
8.2.1 Decaimento Radioativo e Períodos de Meia-vida 167
8.2.2 Equipartição da Energia para n Graus de Liberdade 169
8.2.3 Expansão Multipolar: Dependência Radial do Termo n 172
8.2.4 Operador Momento Linear 173
8.2.5 Estados Excitados do Oscilador Harmônico Quântico 175
8.2.6 Álgebra do Momento Angular: Relação de Comutação Generalizada . 178
8.2.7 Matrizes de Transferência para n Barreiras de Potencial Idênticas 179

9 Conclusão **183**

Prefácio

As demonstrações matemáticas são imprescindíveis ao ensino dessa ciência. À vista disso, este livro tem como objetivo desenvolver um estudo sobre a Demonstração em Matemática como ferramenta de ensino, especificamente sobre o Princípio de Indução Finita, aplicado a conteúdos do ensino médio e superior.

Como ponto de partida, buscou-se amparo em referenciais que discutem a dupla natureza da prova: a formalidade lógica e a função explicativa. Autores como Gila Hanna e Michael de Villiers argumentam que a demonstração em sala de aula deve ir além da mera verificação, servindo como meio de comunicação e compreensão profunda. Esse embasamento estende-se aos trabalhos de Gilbert Arsac, Raymond Duval e ao rigor teórico de Elon Lages Lima.

Ademais, ao observar o legado de David Hilbert e G.H. Hardy, percebe-se que a demonstração constitui a garantia de rigor necessário para sustentar a estrutura matemática. Conforme a perspectiva de Henri Poincaré, se a intuição atua como motor da descoberta, é a lógica que estabelece a certeza necessária aos resultados. A negligência desse rigor no processo de ensino pode comprometer a formação do estudante, reduzindo a matemática a um conjunto de regras utilitárias e dogmas

memorizados sem fundamentação lógica. Assim, este livro ressalta a importância da prova como o critério essencial para a validação do conhecimento científico.

Essa busca pela certeza, contudo, não ocorre em um vácuo estático. Como bem observou George Pólya, a matemática possui uma faceta "em construção" — experimental e indutiva — que precede a forma final e acabada apresentada nos manuais. É nesse terreno fértil que Imre Lakatos situa a demonstração não como uma verdade petrificada, mas como um processo vivo de provas e refutações, onde o erro e o refinamento moldam o conceito. Para o estudante, compreender que a prova nasce dessa dialética humana é libertador, pois retira o véu de mistério inalcançável que muitas vezes encobre a criação matemática.

Ainda nesse cenário, a tensão entre estrutura e significado merece destaque. Se por um lado a arquitetura monumental erguida pelo grupo Bourbaki definiu o padrão de rigor contemporâneo, organizando o conhecimento em estruturas límpidas, por outro, René Thom adverte que o rigor não pode substituir o sentido. A formalização extrema, quando desconectada da intuição ou da realidade, corre o risco de tornar-se estéril para quem aprende. O verdadeiro desafio docente reside, portanto, em equilibrar a solidez estrutural exigida pela academia com a clareza intuitiva necessária à cognição.

No decorrer desta obra, apresenta-se a definição de demonstração no âmbito da lógica, bem como uma argumentação envolvendo essas duas áreas. Enfatiza-se a importância da demonstração no ensino e mais alguns fenômenos correlatos envolvidos.

Sobre indução matemática, de modo primeiro, temos os axiomas de Peano, o Princípio da Boa Ordenação, a Primeira Forma do Princípio de Indução Finita e também a segunda forma deste mesmo princípio. Tal percurso converge para a apresentação de conteúdos do ensino médio e superior que podem ser ensinados sob a ótica indutiva, fomentando, assim, um aprendizado consolidado e significativo.

CAPÍTULO

4

Indução Matemática

Este estudo sobre a indução aborda a fundamentação do método a partir da apresentação dos *axiomas de Peano* — também referenciados na literatura como axiomas de Dedekind-Peano —, os quais estabelecem os princípios fundamentais que sustentam a construção matemática. A partir dessa base axiomática, desenvolve-se o encadeamento conceitual necessário para compreender o Princípio da Boa Ordenação (PBO) e as duas formas do método: a primeira forma do Princípio de Indução Finita e a segunda forma, também conhecida como indução forte.

O referencial teórico deste capítulo baseia-se nas contribuições de Boyer (2012) [8], Lima (2016) [21], Gonçalves (2015) [16], Santos (2015) [31] e Silva (2015) [33]. Para fins de rigor e padronização das demonstrações, o conjunto dos números naturais é definido a partir do número 1, sendo representado por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Essa definição permite trabalhar a ideia de sucessão de forma inequívoca desde o primeiro passo indutivo.

4.1 Axiomas de Peano

Segundo Boyer (2012), os *axiomas de Peano*, formulados pela primeira vez em 1889 na *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, representam a mais notável tentativa do século de reduzir a aritmética comum — e, consequentemente, a maior parte da matemática — a um puro simbolismo formal [8]. Peano também dedicou considerável esforço ao desenvolvimento da lógica simbólica para sustentar essa estrutura.

A teoria dos números naturais pode ser deduzida dos axiomas que doravante serão apresentados, sendo eles conhecidos como axiomas de Peano. Seja $\mathbb{N}$ um conjunto cujos elementos são denominados números naturais, e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, que é o valor assumido pela função s no ponto n, é designado como sendo o sucessor de n [21].

Os axiomas que regem essa estrutura são:

- A_1 (Injetividade): Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injetiva. Em outros termos: $m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$.
- A_2 (Elemento Inicial): $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ consta de um só elemento, representado pelo símbolo 1. Portanto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $1 \neq s(n)$.
- A_3 (Princípio de Indução Finita): Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$, tem-se também $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

4.2 Princípio da Boa Ordenação (PBO)

4.2.1 Teorema Todo conjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.

Demonstração: Seja I_n o conjunto dos números naturais menores ou iguais a n. Se $1 \in A$, de imediato, ele próprio será o menor elemento de A. Entretanto, suponha que $1 \notin A$ e considere X como sendo o conjunto dos números naturais n tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Como $1 \notin A$, temos que $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - A$, logo nota-se que $1 \in X$. Por outro lado, como A não é vazio, conclui-se que $X \neq \mathbb{N}$. Portanto, a conclusão do axioma A_3 não é válida. Desta forma, deve existir $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Então $I_n = \{1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{N} - A$, porém $n_0 = n + 1 \in A$. Logo, n_0 é o menor elemento do conjunto A, uma vez que não existe número natural entre n e $n + 1$. ■

4.2.2 Exemplo Prove que não existe um número inteiro n tal que $0 < n < 1$.

Demonstração: Em caráter preliminar, suponha por absurdo que exista um $n \in \mathbb{Z}$, sendo $0 < n < 1$. Dessa forma, o conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} : 0 < n < 1\}$ é não vazio. Como os supostos elementos de A são inteiros estritamente positivos, temos que $A \subset \mathbb{N}$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$. Visto que $n_0 \in A$, temos $0 < n_0 < 1$ e, daí, segue que $0 < n_0^2 < n_0 < 1$. Note que n_0^2 também é inteiro, logo $n_0^2 \in A$. Mas isso contradiz a minimalidade de $n_0 \in A$, ou seja, o fato de n_0 ser o elemento mínimo de A. □

É importante mencionar que o Princípio da Boa Ordenação (PBO), a primeira forma do Princípio de Indução e a segunda forma deste mesmo princípio (indução forte) são equivalentes. Doravante, mostrar-se-á a veracidade das seguintes implicações:

- Teorema 4.2.1 (PBO) $\Rightarrow$ Proposição 4.3.1 (Primeira Forma do Princípio de Indução Finita).
- Proposição 4.3.1 (Primeira Forma do Princípio de Indução Finita) $\Rightarrow$ Proposição 4.4.1 (Segunda Forma do

Princípio de Indução Finita).

- Proposição 4.4.1 (Segunda Forma do Princípio de Indução Finita) $\Rightarrow$ Teorema 4.2.1 (PBO).

Esta última correspondência nada mais é que outra forma de demonstrar o Princípio da Boa Ordenação.

4.3 Primeira Forma do Princípio de Indução Finita

4.3.1 Proposição Seja X um subconjunto dos números naturais. Se X possui as seguintes propriedades:

(i) $1 \in X$

(ii) $k + 1 \in X$ sempre que $k \in X$.

Então X contém todos os números naturais.

Desta forma, X é o próprio conjunto dos naturais, ou seja, $X = \mathbb{N}$. Almeja-se provar que se X é um subconjunto dos números naturais possuindo as propriedades (i) e (ii), então é necessário que ele próprio contenha todos os números naturais. A prova aqui apresentada é por contradição e será demonstrada tendo como hipótese o Princípio da Boa Ordenação.

Demonstração: (PBO) $\Rightarrow$ Proposição 4.3.1. Suponha que X, mesmo possuindo as propriedades (i) e (ii), não contenha todos os números naturais. Seja Y o conjunto dos números naturais não contidos em X. Pelo PBO, Y possui um elemento mínimo, sendo este maior do que 1, pois $1 \in X$. Seja y_0 este elemento. Obviamente, $y_0 - 1 \in X$ e, como X satisfaz a propriedade (ii), então o sucessor de $y_0 - 1$, que é y_0, igualmente deve

pertencer a X. Deste modo, esta contradição traz a conclusão de que Y tem que ser vazio, e isto encerra a demonstração. □

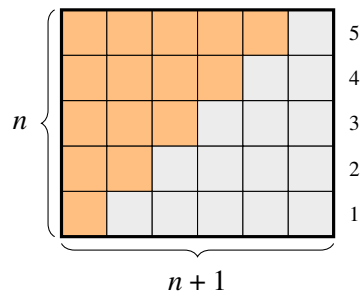
"O Princípio da Indução é muito útil para demonstrar proposições que se referem a inteiros. Ele está implícito em todos os argumentos onde se diz 'e assim por diante', 'e assim sucessivamente' ou 'etc'." [21].

4.3.2 Exemplo Prove por indução que a seguinte propriedade, conhecida como soma de Gauss:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

é válida para todo $n \geq 1$.

Figura 4.1: Interpretação geométrica da soma $1 + 2 + \cdots + n$ (aqui com $n = 5$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Legenda: Duas "escadas" iguais, cada uma com $1+2+\cdots+n$ *quadradinhos (em laranja e em cinza; os números à direita indicam a quantidade de quadradinhos laranja em cada linha), encaixam-se formando um retângulo* $n \times (n+1)$. *Logo,* $2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n+1)$.

Demonstração: Inicialmente, será verificada a veracidade de $P(n)$ para $n = 1$. Se a igualdade for verdadeira, então a base indutiva estará provada. Fazendo a devida substituição, obtém-se:

$$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Suponha como hipótese indutiva que a igualdade de $P(n)$ seja válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, tal que:

$$P(k) : 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Agora, utilizando a hipótese indutiva, provar-se-á que $P(n)$ é válida para $n = k + 1$ (passo indutivo). Ou seja:

$$P(k+1) : 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

De fato, somando $(k+1)$ em ambos os lados de $P(k)$, segue-se que:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Logo, $P(k)$ implica $P(k+1)$ e, pelo Princípio da Indução, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso encerra a demonstração. □

4.3.3 Exemplo Prove por indução que a propriedade $P(n)$: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Considerando $n = 1$, temos que $P(1)$ é verdadeira, pois:

$$P(1) : 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 \Rightarrow 1 = 1$$

De forma análoga, verifica-se que $P(n)$ também é válida para $n = 2$, ou seja:

$$P(2) : 1^3 + 2^3 = \left[\frac{2(2+1)}{2}\right]^2 \Rightarrow 1 + 8 = 3^2 \Rightarrow 9 = 9$$

Logo, a base indutiva está estabelecida.

Agora, suponha a veracidade de $P(n)$ para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, a hipótese indutiva. Assim:

$$P(k) : 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

Utilizando esse fato, mostrar-se-á que $P(n)$ também se verifica para $n = k + 1$, ou seja:

$$P(k+1) : 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Somando $(k + 1)^3$ em ambos os lados de $P(k)$ (a hipótese indutiva), obtém-se:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

Agora, manipulando algebricamente o lado direito dessa expressão, segue que:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \end{aligned}$$

Ao colocar $(k + 1)^2$ em evidência, a expressão já mostra o

aspecto desejado, pois:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4k + 4]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ &= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

Logo, a propriedade $P(n) : 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ é válida para $n = k + 1$ sempre que é válida para $n = k$; logo, pelo Princípio da Indução, vale para todo $n \in \mathbb{N}$, e isso encerra a demonstração. □

4.3.4 Exemplo Utilize indução para demonstrar a seguinte propriedade, válida para todo número real $x \neq 1$:

$$P(n) : 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Demonstração: De início, mostrar-se-ão alguns casos iniciais para estabelecer a base indutiva.

Para $n = 1$, a expressão é válida, pois $x^0 = 1 = \frac{x-1}{x-1}$. Analogamente, para $n = 2$, temos $1 + x = \frac{x^2-1}{x-1}$. Basta fazer a divisão dos polinômios ou reescrever a expressão reduzindo-a da forma como segue:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = 1 + x$$

Assim, $1 + x = 1 + x$.

Admitindo agora a validade de $P(n)$ para $n = k$, e utilizando isto, provar-se-á que a mesma também se verifica para $n = k + 1$.

De tal modo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} x^i &= \sum_{i=0}^{k-1} x^i + x^k \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) + x^k \\ &= \frac{x^k - 1}{x - 1} + x^k \\ &= \frac{x^k - 1 + x^k(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^k - 1 + x^{k+1} - x^k}{x-1} \\ &= \frac{x^{k+1} - 1}{x-1}\end{aligned}$$

Através desse resultado, a condição (ii) está verificada e, então, pelo Princípio de Indução Finita, conclui-se a veracidade de $P(n) : 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

4.3.5 Exemplo Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$, demonstre que $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$.

Demonstração: Faremos uma demonstração algébrica direta utilizando a definição de fatorial. Partindo do lado

esquerdo da igualdade, temos:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}\\ &= \frac{n!\cdot m+n!\cdot(n-m+1)}{m!(n-m+1)!}\\ &= \frac{n!(m+n-m+1)}{m!(n-m+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)}{m!(n+1-m)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}\\ &= \binom{n+1}{m}\end{aligned}$$

Em que utilizamos os fatos de que $m! = m\cdot(m-1)!$ e $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$. Logo, a igualdade é válida para todo $n \geq m$. ■

4.3.6 Exemplo Se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, prove por indução sobre n que:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{i}x^{n-i}y^i + \cdots + y^n$$

Demonstração: Inicialmente, verificamos para $n = 1$: $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y = x+y$. Assumindo a validade para $n = k$, para $n = k+1$ temos:

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= (x+y)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i+1}y^i + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^{i+1}\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de índice na segunda soma e isolando os termos x^{k+1} e y^{k+1}, aplicamos a Relação de Stifel provada

no Exemplo 4.3.5:

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right] x^{k+1-i} y^i + y^{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{k+1-i} y^i\end{aligned}$$

Isso conclui a prova por indução. ■

4.3.7 Exemplo *Seja $a \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$. Definimos as potências de expoente inteiro não negativo de a de modo recursivo:*

$$a^0 = 1, \qquad a^{m+1} = a^m \cdot a \quad \text{para todo inteiro } m \geq 0.$$

Assim, $a^1 = a$ e, para $m \geq 2$, $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ vezes}}$.

Prove que, para todos os inteiros $m, n \geq 0$: (i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demonstração (i): Iniciamos fixando um inteiro $m \geq 0$ e verificando a base da indução para $n = 0$. Pela definição de potência, temos que $a^0 = 1$, o que implica $a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$. Como $a^{m+0} = a^m$, a igualdade é satisfeita para o caso inicial.

Assumindo que a propriedade seja válida para um inteiro $k \geq 0$, tal que $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$, analisamos agora o caso para $n = k + 1$. Utilizando a definição recursiva de potência e a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}a^m \cdot a^{k+1} &= a^m \cdot (a^k \cdot a^1) \\ &= (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 \\ &= a^{m+k} \cdot a^1 \\ &= a^{(m+k)+1} \\ &= a^{m+(k+1)}\end{aligned}$$

Dessa forma, a validade para $n = k$ implica a validade para $n = k + 1$. Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a igualdade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 0$. ■

Demonstração (ii): Fixamos um inteiro $m \geq 0$ e procedemos novamente por indução sobre n. Para o caso base $n = 0$, observamos que $(a^m)^0 = 1$ e $a^{m \cdot 0} = a^0 = 1$, o que confirma a base da indução.

Supondo que a relação seja válida para k, isto é, $(a^m)^k = a^{m \cdot k}$, verificamos a validade para $n = k + 1$. Aplicando a definição de potência e a propriedade de produto de potências de mesma base demonstrada anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned}(a^m)^{k+1} &= (a^m)^k \cdot (a^m)^1 \\ &= a^{m \cdot k} \cdot a^m \\ &= a^{m \cdot k + m} \\ &= a^{m(k+1)}\end{aligned}$$

Como a validade da propriedade para k garante sua validade para $k + 1$, conclui-se que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ para todo inteiro $n \geq 0$. ■

4.4 Segunda Forma do Princípio de Indução Finita

4.4.1 Proposição Seja X um subconjunto dos números naturais. Se X possui as duas seguintes propriedades:

(i) $1 \in X$.

(ii) $k + 1 \in X$ *sempre que* $1, 2, \ldots, k \in X$.

Então X contém todos os números naturais.

Analogamente à Proposição 4.3.1, tem-se que $X = \mathbb{N}$.

Nessa demonstração, Z é definido como sendo um conjunto arbitrário dos números naturais satisfazendo as condições da Proposição 4.4.1. Assim, deve-se mostrar que todos os números naturais estão contidos em Z. Para tanto, será utilizada a Proposição 4.3.1.

Demonstração: Proposição 4.3.1 $\Rightarrow$ Proposição 4.4.1. Denote-se por X_n a sentença "os naturais $(1, \ldots, n)$ estão em Z". Por hipótese, X_1 é verdadeira. Admita-se, agora, a veracidade de X_k, sendo k um número natural arbitrário. Então, os naturais $(1, \ldots, k)$ estão em Z. Logo, por hipótese, $k + 1$ está em Z e assim, X_{k+1} é verdadeira. Portanto, pela Proposição 4.3.1, X_n é verdadeira para todo natural n e, por conseguinte, Z contém todos os números naturais. ■

Observação 4.4.2. O fato de poder concluir que X_{k+1} é verdadeira a partir do fato de $k + 1$ estar em Z é consequência da não existência de um inteiro positivo n entre dois outros inteiros consecutivos k e $k + 1$. Se existisse um tal n, ocorreria o seguinte: $k < n < k + 1$, e, portanto, $0 < n - k < 1$, isto é, existiria um inteiro entre 0 e 1, o que contradiz o Exemplo 4.2.2.

4.4.3 Exemplo Um número natural p chama-se primo quando $p \neq 1$ e não se pode escrever $p = m \cdot n$ com $1 < m < p$ e $1 < n < p$. O chamado Teorema Fundamental da Aritmética diz que todo número natural $n \geq 2$ se decompõe, de modo único (a menos da ordem dos fatores), como produto de fatores primos.

Demonstração: Para essa demonstração utilizar-se-á o Segundo Princípio da Indução, a partir de $n = 2$. O caso inicial é imediato, pois 2 é primo. Seja $n \geq 2$. Então, suponha que todo número natural m, com $2 \leq m < n$, possa ser decomposto

como produto de fatores primos. Assim, ou n é primo (e neste caso n é, de modo trivial, um produto de fatores primos) ou então $n = m \cdot k$, sendo $1 < m < n$ e $1 < k < n$.

Da hipótese de indução, segue que m e k são produtos de fatores primos e, dessa forma, n também o é. Logo, pelo Segundo Princípio da Indução, conclui-se que todo número natural $n \geq 2$ é produto de números primos.

Para demonstrar a unicidade, admita $n \geq 2$. Agora, suponha que todos os números naturais menores do que n sejam escritos como produto de fatores primos de forma única.

Então, suponha que n possua duas decomposições:

$$n = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$$

e

$$n = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p,$$

de modo que α_i e β_j sejam números primos. Se $\alpha_i = \beta_j$ para determinados i, j (neste caso, pode-se supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 = \beta_1$), assim, segue que:

$$n = \alpha_1 r$$

e

$$n = \beta_1 s,$$

sendo $r = \alpha_2 \ldots \alpha_m$ e $s = \beta_2 \ldots \beta_p$. Cancelando $\alpha_1 = \beta_1$, obtém-se $r = s < n$. Se $r = s = 1$, então $m = p = 1$ e nada resta a provar. Caso contrário, pela hipótese de indução, a decomposição de $r = s$ é única, donde $m - 1 = p - 1$, isto é, $m = p$, e, após uma eventual reordenação dos fatores, $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 2, 3, \ldots, m$.

Agora, se $\alpha_i \neq \beta_j$ para todos os índices $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, p$, então, como primos distintos são primos entre si e, pelo Lema de Euclides, um primo que divide um produto divide algum dos fatores, obtém-se:

$$\text{mdc}(n, n) = \text{mdc}(\alpha_1 \ldots \alpha_m, \beta_1 \ldots \beta_p) = 1.$$

Mas isso é um absurdo, pois $\text{mdc}(n, n) = n \geq 2$. Portanto, ocorre o primeiro caso em que $\alpha_i = \beta_j$ e segue o resultado. □

Agora, demonstraremos a última equivalência mencionada anteriormente, ou seja, Proposição 4.4.1 (Segunda Forma do Princípio de Indução) ⇒ Teorema 4.2.1 (PBO), a qual será denominada Teorema 4.4.4.

4.4.4 Teorema Proposição 4.4.1 ⇒ Teorema 4.2.1 (PBO).

Demonstração: Seja Z um conjunto não vazio dos números naturais. Deve-se mostrar que Z possui um menor elemento. Admita que Z não possua elemento mínimo e denote por X_n a sentença "n não é um elemento de Z". Logo, X_1 é verdadeira, pois, se 1 pertencesse a Z, ele seria o seu elemento mínimo, uma vez que 1 é o menor número natural (axioma A_2: 1 não é sucessor de nenhum natural).

Agora, assuma-se X_n como sendo verdadeira para todo n de 1 a k, inclusive. Por meio deste fato, conclui-se que X_{k+1} deve ser verdadeira, pois $k + 1$ seria elemento mínimo de Z.

Nesta última sentença, utiliza-se, novamente, a não existência de números naturais n entre dois naturais consecutivos k e $k + 1$. Logo, pela Proposição 4.4.1, X_n é verdadeira para todo natural n. Todavia, isto implica que Z é vazio, o que contraria a hipótese primeira. Logo, a suposição de que Z não possui elemento mínimo é falsa, e o teorema está provado. ■

Convém mencionar que tanto a primeira forma do Princípio de Indução (indução fraca) quanto a segunda (indução forte) admitem outras configurações de apresentação. Não obstante, isso não altera os resultados e as implicações das mesmas. Por exemplo, podem ser enunciadas, respectivamente, da forma como segue [16].

4.4.5 Proposição Suponha que seja dada uma afirmação $a(n)$ dependendo de $n \in \mathbb{N}$ tal que:

(i) $a(1)$ é verdadeira.

(ii) Para $k \in \mathbb{N}$, $a(k+1)$ é verdadeira sempre que $a(k)$ for verdadeira.

Então, $a(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja S o conjunto dos inteiros $m \in \mathbb{N}$ tais que $a(m)$ seja falsa, e suponhamos que $S \neq \emptyset$. Pelo princípio da boa ordenação $\exists\, x_0 \in S$ tal que $x_0 \leq m\ \forall\, m \in S$. Como $a(1)$ é verdadeira, por hipótese temos que $1 \notin S$ e portanto $x_0 \geq 2$; mais ainda, como $x_0 - 1 \notin S$, temos que $a(x_0 - 1)$ é verdadeira. Agora pela hipótese (ii) segue que $a(x_0) = a[(x_0 - 1) + 1]$ é verdadeira, o que é uma contradição. Logo $S = \emptyset$ e a Proposição 4.4.5 está demonstrada. ■

4.4.6 Proposição Suponha que seja dada uma afirmação $a(n)$ dependendo de $n \in \mathbb{N}$ tal que:

(i) $a(1)$ é verdadeira.

(ii) Para cada natural $m > 1$, $a(m)$ é verdadeira sempre que $a(k)$ for verdadeira para $1 \leq k < m$.

Então, $a(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja S o conjunto dos inteiros $m \in \mathbb{N}$ tais que $a(m)$ seja falsa e suponhamos que S é não vazio. Como acima, $\exists\, x_0 \in S$ tal que $x_0 \leq x\ \forall\, x \in S$, e pela hipótese (i) $x_0 > 1$. Portanto, $a(k)$ é verdadeira $\forall\, k$, $1 \leq k < x_0$ e (ii) nos dá uma contradição. ■

FIM DA AMOSTRA GRATUITA

Gostou?

Continue lendo.

A Demonstração em Matemática e o Princípio de Indução Finita

Teoria, Exemplos e Aplicações

Ronaldo Alves • 215 páginas

NA SEQUÊNCIA

4.5 Diferença entre os Princípios de Indução. Quando usar a indução fraca e a forte? A 4.6 organiza o método em um esquema lógico e a 4.7 traz mais exemplos resolvidos.

NO RESTANTE DO LIVRO

Capítulos 5 a 8: progressões e juros compostos, Teorema de Euler, Triângulo de Pascal, Torre de Hanói, divisibilidade, Fibonacci, desigualdades, derivadas e física quântica.

ONDE COMPRAR

VERSÃO EM PDF

Comprar

pay.kiwify.com.br/M77xDem

VERSÃO IMPRESSA

Comprar

loja.uiclap.com/titulo/ua193786

ALTA CULTURA